OLASILIKVE İSTATİSTİK

Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı genel olarak belli bir zaman, alan veya hacimde ortaya çıkan olay sayısını modellemede kullanılır. Örnek olarak; bir kavşakta meydana gelen trafik kazalarının sayısı, bir santrale günde gelen telefonların sayısı, bir e-posta sunucusuna gelen postaların sayısı verilebilir.

X , rasgele değişkeni Poisson dağılımına sahipse, olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & ; \ \lambda > 0 \ , \ x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & ; \quad diğer\ d. \end{cases}$$

Burada λ , dağılımın parametresidir ve ortaya çıkması(gerçekleşmesi) beklenen olay sayısını ifade eder.

Poisson dağılımının ortalaması : $E(X) = \mu = \lambda$

Poisson dağılımının varyansı : $Var(X) = \sigma^2 = \lambda$

Poisson dağılımının M. Ç. fonksiyonu : $M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Poisson dağılımının Karakteristik Fonksiyonu : $\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

Örnek. Saat 9:00 dan 9:05' e kadar operatörün aldığı telefon konuşmalarının sayısı $\lambda = 2$ olan Poisson dağılımına sahiptir. Bir sonraki gün aynı zaman aralığında operatörün telefon konuşması almaması olasılığı nedir?

Çözüm.

X: Saat 9: 00 dan 9: 05' e kadar operatörün aldığı telefon konuşmalarının sayısı

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & ; \ \lambda = 2 \ , \ x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & ; \quad diğer\ d. \end{cases}$$

İstenen olasılık

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}=e^{-2}=0.135335$$

Geometrik Dağılım

Rasgele değişkenin, ilk başarıyı elde etmek için gerekli deneme sayısını gösterdiği dağılımdır.

Başarı olasılığı p nin sabit olduğu bağımsız Bernoulli denemelerinin ilk kez ortaya çıkıncaya kadar tekrarlandığı durumdur.

X , rasgele değişkeni Geometrik dağılıma sahipse, olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir:

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1} & , \; x=1,2,\dots. \\ 0 & , \; diğer\ d. \end{cases}$$

Geometrik dağılımının ortalaması : $E(X)=\mu=\frac{1}{p}$

Geometrik dağılımının varyansı : $Var(X)=\sigma^2=\frac{q}{p^2}$

Geometrik dağılımının M. Ç. fonksiyonu : $M_X(t)=E[e^{tX}]=\frac{pe^t}{1-qe^t}$

Geometrik dağılımının Karakteristik Fonksiyonu : $\phi_X(t)=E\left[e^{itX}\right]=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

Örnek. Bir torbada 8 beyaz 4 siyah top bulunmaktadır. Her defasında yerine konularak bir top çekiliyor.

a) Beyaz topun **ilk defa** 5'inci çekilişte çıkma olasılığı nedir?
b) X: "Beyaz bir top çekmek için yapılan deney sayısı" olarak tanımlandığında, $E(X)$ ve $Var(X)$ değerlerini bulunuz

Çözüm. a)

X: İlk başarıya ulaşıncaya kadar yapılan deney sayısı

$p=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, $\quad q=\frac{1}{3}$

$$P(X=x)=p(1-p)^{x-1} \quad , \quad x=1,2,3,\dots.$$

$$P(X=5)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{5-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{2}{243}$$

b)

X: *Beyaz topun çekilinceye kadar yapılan deney sayısı*

X , Geometrik dağılıma sahip olduğundan,

$$E(X)=\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{2/3}=3/2$$

$$Var(X)=\sigma^2=\frac{q}{p^2}=\frac{1/3}{(2/3)^2}=\frac{1}{3}\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$